LE BLOC PRINCIPAL DE CATÉGORIE $\mathcal{O}$ (POUR $\mathfrak{sl}_2$)

R. VIRK

1. Préliminaires

1.1. La catégorie $\mathcal{O}$. Soit $\mathfrak{sl}_2$ l'algebre de Lie des matrices carrées d'ordre 2 de trace nulle. Nous la désignerons par $\mathfrak{g}$. Elle admet pour base les trois éléments:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a:

$$[e, f] = h, \qquad [h, e] = 2e, \qquad [h, f] = -2f.$$

Le réseau des poids de $\mathfrak{g}$ est $\mathbb{Z}$ et la somme des racines positives est 2.

Soit $M(\lambda)$ le module de Verma de le plus haut poids λ et $L(\lambda)$ l'unique quotient simple de $M(\lambda)$. Nous désignons par v_λ^+ le vecteur primitif de poids λ dans $M(\lambda)$.

Nous désignons par $\mathcal{O}$ la BGG catégorie $\mathcal{O}$. On note les modules $M(\lambda)$ et $L(\lambda)$ sont objets de $\mathcal{O}$. Soit $\mathrm{pr}_\lambda : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ le foncteur de projection sur le Ext-bloc de $M(\lambda)$. On a $\mathrm{pr}_\lambda = \mathrm{pr}_{-\lambda-2}$. Posons $\mathcal{O}_\lambda := \mathrm{pr}_\lambda \mathcal{O}$. On note $M(-1) \simeq L(-1)$ est le seul module simple dans $\mathcal{O}_{-1}$ et chaque objet de $\mathcal{O}_{-1}$ est isomorphe à la somme direct of $L(-1)$s. Ainsi, $\mathcal{O}_{-1}$ est équivalent à la catégorie d'espaces vectoriels.

La catégorie $\mathcal{O}_0$ s'appelle le bloc principal. On note $\mathcal{O}_0$ contient seulement deux modules de Verma: $M(0)$ et $M(-2)$. En outre, $M(0)$ est un objet projectif dans $\mathcal{O}$.

Posons $V := L(1)$, on a $V = \mathbb{C}\text{-span}\{v_1, v_{-1}\}$ avec v_i de poids i et

$$ev_1 = 0, \qquad , fv_1 = v_1, \qquad ev_{-1} = v_1, \qquad fv_{-1} = 0.$$

Nous désignons par V^* le module dual de V. On a $V^* = \mathbb{C}\text{-span}\{\delta_1, \delta_{-1}\}$ avec v_i de poids $-i$ et

$$e\delta_1 = -\delta_{-1}, \qquad f\delta_1 = 0, \qquad e\delta_{-1} = 0, \qquad f\delta_{-1} = -\delta_1.$$

Il ist clair que $V^* \simeq V$.

1.2. Les foncteurs de translation. Rappelons que, un foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est adjoint à gauche de un foncteur $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ s'il existe morphismes naturels $\eta : \mathrm{id} \to GF$ et $\varepsilon : FG \to \mathrm{id}$ tels que les compositions:

$$G \xrightarrow{\eta \circ \mathbb{1}_G} GFG \xrightarrow{\mathbb{1}_G \circ \varepsilon} G \qquad \text{et} \qquad F \xrightarrow{\mathbb{1}_F \circ \eta} FGF \xrightarrow{\varepsilon \circ \mathbb{1}_F} F$$

soient l'identité. Le foncteur G s'appelle un adjoint à droite de F. Les morphismes η et ε s'appelent le unit et le counit d'adjonction, respectivement, de l'adjoint paire (F, G).

Le lemme suivant est immédiate.

Lemme 1.1. *Supposons le foncteur $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est adjoint à gauche de le foncteur $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.*

(i) *Si $X \in \mathcal{A}$ n'est annulé par F, alors $\eta : X \to GF(X)$ est non nulle.*

(ii) *Si $Y \in \mathcal{B}$ n'est annulé par G, alors $\varepsilon : FG(Y) \to Y$ est non nulle.*

On définit les foncteurs de translation (au sens de Jantzen) $T_0^{-1} : \mathcal{O}_0 \to \mathcal{O}_{-1}$ et $T_{-1}^0 : \mathcal{O}_{-1} \to \mathcal{O}_0$ par

$$T_0^{-1}(X) := \mathrm{pr}_{-1}(V \otimes X), \qquad T_{-1}^0(Y) := \mathrm{pr}_0(V^* \otimes Y).$$

T_{-1}^0 est adjoint à gauche et à droite de T_0^{-1}. Nous désignons par η le unit, par ε le counit d'adjonction de l'adjoint paire (T_0^{-1}, T_{-1}^0), et désignons par $\overline{\eta}$ le unit, par $\overline{\varepsilon}$ le counit d'adjonction de le paire (T_{-1}^0, T_0^{-1}).

Le morphisme η est le composition de trois morphismes: l'inclusion $\mathrm{id}_{\mathcal{O}_0} \to \mathrm{id}_{\mathcal{O}}$, le morphisme naturel $\mathrm{id}_{\mathcal{O}} \simeq \mathbb{C} \otimes - \to V^* \otimes V \otimes -$, et la projection $V^* \otimes V \otimes - \to \Theta$. De la même manière, le morphisme $\overline{\varepsilon}$ est le composition de l'inclusion $\Theta \to V^* \otimes V \otimes -$, le morphisme naturel $V^* \otimes V \otimes - \to \mathbb{C} \otimes - \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{O}}$, et la projection $\mathrm{id}_{\mathcal{O}} \to \mathrm{id}_{\mathcal{O}_0}$. Les morphismes ε et $\overline{\eta}$ sont définis pareillement.

1.3. Les foncteurs C et K. Posons $C := \mathrm{coker}(\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{O}_0} \to \Theta)$, et $K = \ker(\overline{\varepsilon} : \theta \to \mathrm{id}_{\mathcal{O}_0})$. Il est immédiate que C est exact à droite et K est exact à gauche. En fait, C est l'adjoint à gauche de K.

1.4. Dualité contravariant. On définit le foncteur de dualité contravariant $\mathbb{D} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ comme suit: si $X \in \mathcal{O}$, alors $X = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} X_\lambda$, où $X_\lambda = \{x \in X \,|\, h \cdot x = \lambda x\}$. Posons $\mathbb{D}X := \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X_\lambda, \mathbb{C})$ avec la action de $\mathfrak{g}$ donné par $\langle x \cdot f, - \rangle = \langle f, \theta(x) \cdot - \rangle$, où $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est l'unique anti-involution donné par $e \mapsto f, f \mapsto e, h \mapsto h$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est l'application d'evaluation. Il est clair que $\mathbb{D}$ soit un foncteur contravariant et que $\mathbb{D} \circ \mathbb{D} \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{O}}$. En outre, on peut vérifier que $\mathbb{D}L(\lambda) \simeq L(\lambda)$.

2. Action de les foncteurs sur $M(0)$

2.1. Le foncteur Θ. Comme un espace vectoriel, $V \otimes M(0) = \mathbb{C}\text{-span}\{f^i(v_1 \otimes fv_0^+), f^i(v_1 \otimes v_0^+)\}$. Les vecteurs $v_1 \otimes fv_0^+$ et $v_1 \otimes v_0^+$ sont vecteurs primitifs de poids -1 et 1 respectivement. Ainsi, $\mathrm{pr}_{-1}(V \otimes M(0)) \simeq M(-1)$ et est donné par projection sur $\mathbb{C}\text{-span}\{f^i(v_1 \otimes fv_0^+)\}$.

On vérifie par calcul direct que le module $V^* \otimes \mathrm{pr}_{-1}(V \otimes M(0))$ contient seulement deux vecteurs primitifs: $\delta_{-1} \otimes v_1 \otimes fv_0^+$ (de poids 0) et $f(\delta_{-1} \otimes v_1 \otimes fv_0^+)$ (de poids -2). Considérons le filtration

$$\begin{aligned} 0 \subset \mathbb{C}\text{-span}\{f^i(\delta_{-1} \otimes v_1 \otimes fv_0^+)\} &\subset \mathbb{C}\text{-span}\{f^i(\delta_{-1} \otimes v_1 \otimes fv_0^+), f^i(\delta_1 \otimes v_1 \otimes fv_0^+)\} \\ &= V^* \otimes \mathrm{pr}_{-1}(V \otimes M(0)). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Les facteurs de cette filtration sont isomorphe à $M(0)$ et $M(-2)$. Puisque $\delta_1 \otimes v_1 \otimes fv_0^+$ n'est un vecteur primitif, nous inférons que $V^* \otimes \mathrm{pr}_{-1}(V \otimes M(0))$ est indécomposable. En particulier, $\Theta M(0) = V^* \otimes \mathrm{pr}_{-1}(V \otimes M(0))$. Puisque $M(0)$ est projectif, il s'ensuit que $\Theta M(0)$ est la couverture projectif de $L(\lambda)$.

2.2. Le foncteur C. Le morphisme $\eta : M(0) \to \Theta M(0)$ est donné par

$$v_0^+ \mapsto \delta_1 \otimes v_1 \otimes v_0^+ = \delta_1 \otimes v_1 \otimes v_0^+ + \delta_{-1} \otimes f(v_1 \otimes v_0^+) - \delta_{-1} \otimes v_1 \otimes fv_0^+ \mapsto -\delta_{-1} \otimes v_1 \otimes fv_0^+.$$

De la filtration 2.1, découle que $CM(0) \simeq M(-2)$.

2.3. Le foncteur K. On a $\overline{\varepsilon}(\delta_{-1} \otimes v_1 \otimes fv_0^+) = 0$ et $\overline{\varepsilon}(\delta_1 \otimes v_1 \otimes fv_0^+) = fv_0^+$. Nous inférons que $KM(0) \simeq M(0)$.

3. Action de les foncteurs sur $M(-2)$

3.1. Le foncteur Θ. Le module $V \otimes M(-2)$ contient deux vecteurs primitifs: $2v_{-1} \otimes v_{-2}^+ + v_1 \otimes fv_{-2}^+$ (de poids -3) et $v_1 \otimes v_{-2}^+$ (de poids -1). En outre,

$$V \otimes M(-2) = \mathbb{C}\text{-span}\{f^i(2v_{-1} \otimes v_{-2}^+ + v_1 \otimes fv_{-2}^+), f^i(v_1 \otimes v_{-2}^+)\}.$$

Ainsi, $\mathrm{pr}_{-1}(V \otimes M(-2))$ est la projection sur $\mathbb{C}\text{-span}\{f^i(v_1 \otimes v_{-2}^+\}$. Il est maintenant clair que $\Theta M(-2) \simeq \Theta M(0)$.

3.2. Le foncteur C. Le vecteurs primitifs dans $\Theta M(-2)$ sont $\delta_{-1} \otimes v_1 \otimes v_{-2}^+$ (de poids 0) et $f(\delta_{-1} \otimes v_1 \otimes v_{-2}^+)$ (de poids -2). En outre, le morphisme $\eta : M(-2) \to \Theta M(-2)$ est donné par

$$\begin{aligned} v_{-2}^+ &\mapsto \delta_1 \otimes v_1 \otimes v_{-2}^+ + \delta_{-1} \otimes v_{-1} \otimes v_{-2}^+ \\ &= \delta_1 \otimes v_1 \otimes v_{-2}^+ + \delta_{-1} \otimes (2v_{-1} \otimes v_{-2}^+ + v_1 \otimes fv_{-2}^+ - f(v_1 \otimes v_{-2}^+)) \\ &\mapsto -f(\delta_{-1} \otimes v_1 \otimes v_{-2}^+). \end{aligned}$$

Ainsi, $CM(-2)$ est un extension de $M(-2)$ par $L(0)$. Considérons le filtration

$$0 \subset \mathbb{C}\text{-span}\{f^i(\delta_{-1} \otimes v_1 \otimes v_{-2}^+)\} \subset \mathbb{C}\text{-span}\{f^i(\delta_{-1} \otimes v_1 \otimes v_{-2}^+), f^i(\delta_1 \otimes v_1 \otimes v_{-2}^+)\} = \Theta M(-2).$$

L'application de e à le vecteur $\delta_1 \otimes v_1 \otimes v_{-2}^+$ produits $-\delta_{-1} \otimes v_1 \otimes v_{-2}^+$. Nous inférons que $CM(-2)$ est un extension non trivial de $M(-2)$ par $L(0$. On applique $\mathbb{D}$ à la séquence exacte $0 \to M(0) \to \Theta M(-2) \to M(-2) \to 0$, on obtient la séquence exacte $0 \to M(-2) \to \Theta M(-2) \to \mathbb{D}M(0) \to 0$. Puisque $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(-2), \Theta M(-2))$ est de dimension une, nous inférons que $\mathbb{D}M(0) \simeq CM(-2)$. On note $\mathbb{D}M(0)$ est la coque injectif de $L(0)$.

3.3. Le foncteur K. On a $\overline{\varepsilon}(\delta_{-1} \otimes v_1 \otimes v_{-2}^+) = 0$ et $\overline{\varepsilon}(\delta_1 \otimes v_1 \otimes v_{-2}^+) = v_{-2}^+$. Ainsi, $KM(-2) \simeq M(0)$.

4. Action de les foncteurs sur modules simples

La catégorie $\mathcal{O}_0$ contient seulement deux modules simples: $L(0)$ et $L(-2)$. Le module $L(-2)$ est isomorphe à $M(-2)$. En outre, il est clair que $T_0^{-1}L(0) = 0$. Ainsi, $\Theta L(0) = CL(0) = KL(0) = 0$.

5. Action de les foncteurs sur modules injectifs/projectifs

5.1. Le foncteur Θ. Nous désignerons par $P(\lambda)$ la couverture projectif de $L(\lambda)$ et par $I(\lambda)$ la coque injectif de $L(\lambda)$. On note $P(0)$ est isomorphe $M(0)$ et $I(0)$ est isomorphe $\mathbb{D}M(0)$. Puisque Θ est adjoint à gauche et à droite de se, il conserve les objets injectifs/projectifs. Nous inférons que $\Theta I(0) \simeq I(-2) \simeq \mathbb{D}P(-2) \simeq P(-2)$. On a aussi que $\Theta P(-2) \simeq P(-2) \oplus P(-2)$. Pour un demonstration de cette, applique Θ à la séquence exacte $0 \to M(0) \to P(-2) \to M(-2) \to 0$ et note que $\Theta M(-2) \simeq \Theta M(0) \simeq P(-2)$.

5.2. Le foncteur C. Pour le module $I(0)$, le morphisme naturel η donne un morphisme $I(0) \to P(-2)$. D'après Lemme 1.1, $CI(0) \neq P(-2)$. Il s'ensuit que $CI(0) \simeq I(0)$.

Pareillement, $CP(-2) \neq P(-2) \oplus P(-2)$. Il s'ensuit que $CP(-2)$ est $P(-2)$ ou $P(-2) \oplus M(-2)$. En outre, on a le diagram commutatif

$$\begin{tikzcd} M(0) \arrow[r] \arrow[d, "\eta"'] & P(-2) \arrow[d, "\eta"'] \\ P(-2) \arrow[r] & P(-2) \oplus P(-2), \end{tikzcd}$$

où les morphismes $M(0) \to P(-2)$ et $P(-2) \to P(-2) \oplus P(-2)$ sont l'applications d'inclusion. Puisque $\eta : M(0) \to P(-2)$ est injectif (voir §**2.2**), nous inférons $CP(-2) \simeq P(-2)$.

5.3. Le foncteur K. Pour le module $I(0)$, le morphisme naturel $\bar{\varepsilon}$ donne un morphisme $P(-2) \to I(0)$. Nous inférons $KI(0)$ est $L(-2)$ ou $P(-2)$. D'après Lemma 1.1, $KI(0) \neq P(-2)$. Ainsi, $KI(0) \simeq L(-2)$.

Pareillement, il est clair que $KP(-2)$ est $P(-2)$ ou $P(-2) \oplus M(0)$. En outre, on a le diagram commutatif

$$\begin{tikzcd} P(-2) \oplus P(-2) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\varepsilon}"'] & P(-2) \arrow[d, "\bar{\varepsilon}"'] \\ P(-2) \arrow[r] & M(-2), \end{tikzcd}$$

où les morphismes $P(-2) \oplus P(-2) \to P(-2)$ et $P(-2) \to M(-2)$ sont surjectif. Nous inferons $KP(-2) \simeq P(-2)$.

6. Résumé

On a

	$L(0)$	$L(-2)$	$M(0)$	$M(-2)$	$I(0)$	$I(-2)$	$P(0)$	$P(-2)$
Θ	0	$P(-2)$	$P(-2)$	$P(-2)$	$P(-2)$	$P(-2) \oplus P(-2)$	$P(-2)$	$P(-2) \oplus P(-2)$
K	0	$P(0)$	$M(0)$	$M(0)$	$L(-2)$	$I(-2)$	$P(0)$	$P(-2)$
C	0	$I(0)$	$M(-2)$	$I(0)$	$I(0)$	$I(-2)$	$L(-2)$	$P(-2)$
$\mathbb{D}$	$L(0)$	$L(-2)$	$I(0)$	$M(-2)$	$P(0)$	$P(-2)$	$I(0)$	$I(-2)$

On note $L(-2) \simeq M(-2)$, $M(0) \simeq P(0)$ et $P(-2) \simeq I(-2)$.

Department of Mathematics, University of Wisconsin, Madison, WI 53706
E-mail address: `virk@math.wisc.edu`